

線形代数 I 「正方行列と正則行列」

吉富 賢太郎

April 24, 2017

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 = m 次正方行列

A, B 正方行列 \rightsquigarrow $\begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB, BA \text{ 両方定義できる, が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$

A のべき乗

$$A^2 = AA, A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$$

$$\dots A^{n+1} = A^n A (= AA^n) \quad (n \in \mathbf{N})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

非可換性

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

対角行列・単位行列

a_{ii} : 対角成分, 対角行列 : 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \dots$

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

E_n 単位行列 : 対角成分がすべて 1 の対角行列

$$a_{ij} = \delta_{ij} \text{ (クロネッカーの } \delta) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

n 行の行列 $A \Rightarrow E_n A = A$

m 列の行列 $A \Rightarrow A E_m = A$

零行列・三角行列

O_n すべての成分が 0 の n 次正方行列 : n 次零行列

A : $n \times m$ 行列

$$\Rightarrow O_n A = O_{n,m}, A O_m = O_{n,m}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: 上三角 (上半三角) 行列 (対角線より下が 0)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$: 下三角 (下半三角) 行列 (対角線より上が 0)

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在

$X = A^{-1}$ と書き, A の逆行列という.

例 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2次正方のとき: 簡単な公式

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に逆行列が存在 $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

このとき, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

逆行列の性質

- $A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
($ad - bc = 0$)
- A が正則 $\Rightarrow {}^tA$ も正則, $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$
- 逆行列はただ 1 つ $\because X, Y : A$ の逆行列
 $\Rightarrow X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$
- A, B 正則 $\Rightarrow AB$ も正則, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 $\because (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1}$
 $= AA^{-1} = E$