線形代数 I 「正方行列と正則行列」

吉冨 賢太郎

April 24, 2017

正方行列と行列のべき乗

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

A, B 正方行列 $\rightsquigarrow \left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}} \right.$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ \\ \\ \end{cases}$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる,} \\ \end{cases}$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A,\ B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる, が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$$A^2 = AA,\ A^3 = A^2 A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる, が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$A^2 = AA$, $A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2$,

$\ldots\ A^{n+1} = A^nA\ (= AA^n) \qquad (n \in \boldsymbol{N})$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$A^2 = AA$, $A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2$,

$\ldots$ $A^{n+1} = A^nA$ $(= AA^n)$ $\quad (n \in \boldsymbol{N})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$

$\dots\ \ A^{n+1} = A^nA\ (= AA^n) \qquad (n \in \boldsymbol{N})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$$A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$$

$$\ldots\ A^{n+1} = A^nA\ (= AA^n) \qquad (n \in \boldsymbol{N})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $= m$ 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$$A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$$

$$\ldots\ \ A^{n+1} = A^nA\ (= AA^n) \qquad (n \in \boldsymbol{N})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{非可換性}}$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$

$\ldots\ A^{n+1} = A^nA\ (= AA^n) \qquad (n \in \boldsymbol{N})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{非可換性}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

正方行列と行列のべき乗

$m \times m$ 行列 $=$ m 次正方行列

$$A, B \text{ 正方行列} \rightsquigarrow \begin{cases} A^n \text{ が定義できる (べき乗)} \\ AB,\ BA \text{ 両方定義できる，が} \\ \text{一般に } \boxed{AB \neq BA} \text{ (非可換性)} \end{cases}$$

$\boxed{A \text{ のべき乗}}$

$A^2 = AA,\ A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$

$\dots\ A^{n+1} = A^nA\ (= AA^n) \qquad (n \in \boldsymbol{N})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{非可換性}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

対角行列・単位行列

対角行列・単位行列

a_{ii} ： 対角成分 ，

対角行列・単位行列

a_{ii} ： 対角成分 ，対角行列 ： 対角成分以外は 0

対角行列・単位行列

a_{ii} ： 対角成分 ，対角行列 ： 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, . . .

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

対角行列・単位行列

a_{ii} ： 対角成分 ，対角行列 ： 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, . . .

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

E_n 単位行列 ： 対角成分がすべて 1 の対角行列

対角行列・単位行列

a_{ii} : 対角成分 ，対角行列 : 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, . . .

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

E_n 単位行列 : 対角成分がすべて 1 の対角行列

$a_{ij} = \delta_{ij}$ (クロネッカーの δ)

対角行列・単位行列

a_{ii} : 対角成分 , 対角行列 : 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, . . .

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

E_n 単位行列 : 対角成分がすべて 1 の対角行列

$a_{ij} = \delta_{ij}$ (クロネッカーの δ) $\qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

対角行列・単位行列

a_{ii} : 対角成分 ，対角行列 : 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, . . .

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

E_n 単位行列 : 対角成分がすべて 1 の対角行列

$a_{ij} = \delta_{ij}$ (クロネッカーの δ) $\qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ (i = j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases}$

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\ldots$

対角行列・単位行列

a_{ii} ： 対角成分 ，対角行列 ： 対角成分以外は 0

e.g. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, . . .

A, B n 次対角行列 $\Rightarrow AB = BA$

E_n 単位行列 ： 対角成分がすべて 1 の対角行列

$a_{ij} = \delta_{ij}$ (クロネッカーの δ) $\qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

n 行の行列 $A \Rightarrow E_n A = A$

m 列の行列 $A \Rightarrow AE_m = A$

零行列・三角行列

零行列・三角行列

O_n すべての成分が 0 の n 次正方行列：n 次零行列

零行列・三角行列

O_n すべての成分が 0 の n 次正方行列：n 次零行列

A：$n \times m$ 行列

零行列・三角行列

O_n すべての成分が 0 の n 次正方行列：n 次零行列

A：$n \times m$ 行列

$\Rightarrow O_n A = O_{n,m}$, $AO_m = O_{n,m}$

零行列・三角行列

O_n すべての成分が 0 の n 次正方行列 : n 次零行列

A : $n \times m$ 行列

$\Rightarrow O_n A = O_{n,m}$, $AO_m = O_{n,m}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: 上三角 (上半三角) 行列 (対角線より下が 0)

零行列・三角行列

O_n すべての成分が 0 の n 次正方行列：n 次零行列

A : $n \times m$ 行列

$\Rightarrow O_n A = O_{n,m}$, $AO_m = O_{n,m}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: 上三角 (上半三角) 行列 (対角線より下が 0)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$: 下三角 (下半三角) 行列 (対角線より上が 0)

正則行列と逆行列

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在

$X = A^{-1}$ と書き，A の逆行列という．

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在

$X = A^{-1}$ と書き，A の逆行列という.

例 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在

$X = A^{-1}$ と書き，A の逆行列という．

例 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在

$X = A^{-1}$ と書き，A の逆行列という.

例 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

例 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 次正方のとき: 簡単な公式

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に逆行列が存在 $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

正則行列と逆行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在

$X = A^{-1}$ と書き，A の逆行列という．

例 1．$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

例 2．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 次正方のとき：簡単な公式

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に逆行列が存在 $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

このとき，$A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例：$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

逆行列の性質

逆行列の性質

・$A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$(ad - bc = 0)$

逆行列の性質

・$A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$(ad - bc = 0)$

・A が正則 $\Rightarrow {}^tA$ も正則, $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$

逆行列の性質

・$A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $(ad - bc = 0)$

・A が正則 $\Rightarrow$ ${}^tA$ も正則, $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$

・逆行列はただ 1 つ

逆行列の性質

- $A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$(ad - bc = 0)$

- A が正則 $\Rightarrow {}^tA$ も正則, $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$

- 逆行列はただ 1 つ $\because$ X, Y : A の逆行列
$\Rightarrow X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$

逆行列の性質

- $A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$(ad - bc = 0)$

- A が正則 $\Rightarrow$ ${}^tA$ も正則, $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$

- 逆行列はただ 1 つ $\because$ X, Y : A の逆行列

  $\Rightarrow X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$

- A, B 正則 $\Rightarrow$ AB も正則, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

逆行列の性質

・$A \neq O$ であっても正則でない場合あり: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$(ad - bc = 0)$

・A が正則 $\Rightarrow$ ${}^tA$ も正則, $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$

・逆行列はただ 1 つ $\because$ X, Y : A の逆行列
$\Rightarrow X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y$

・A, B 正則 $\Rightarrow$ AB も正則, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$\begin{aligned} \because\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} \\ &= AA^{-1} = E \end{aligned}$$