

線形代数 I 「数ベクトルと行列」

吉富 賢太郎

April 20, 2017

数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, \dots, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

(※簡単のため $(x_i)_{i=1}^n$ または単に (x_i) と略記)

\mathbf{x} : n 次 (実) 数ベクトル, \mathbf{R}^n : n 次元実数ベクトル空間

- ・ 応用例: (big) データをならべた数ベクトル
 \rightsquigarrow 推移行列との積で変動を予想
- ・ 一般の n で数ベクトル空間 \mathbf{R}^n の性質を調べるのが自然

数ベクトルの演算

$$\mathbf{x} = (x_i), \mathbf{y} = (y_i), \mathbf{z} = (z_i) \in \mathbf{R}^n, a, b, c \in \mathbf{R}$$

[等価] $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, (\forall i)$

[加減] $\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = (x_i) \pm (y_i) = (x_i \pm y_i)$

[零ベクトル] $\mathbf{0} = (0)$ すべての成分が 0

[スカラー倍] $c\mathbf{x} = c(x_i) = (cx_i)$

ただし, $(-1)\mathbf{x}$ は $-\mathbf{x}$ と書く: (\mathbf{x} の逆ベクトル)

数ベクトルの演算の性質

- ・ $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (加法の結合法則)
- ・ $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ ($\mathbf{0}$ 加法単位元)
- ・ $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($-\mathbf{x}$ 加法逆元)
- ・ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (可換性)
- ★ $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$ (スカラー倍の結合法則)
- ▷ $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ (分配法則 1)
- ▷ $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ (分配法則 2)
- ★ $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (1 の作用)

※ 上のような性質を持つ加法とスカラー倍を持つ集合は他にも沢山ある．考えてみよう．

1 次結合と基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbf{R}^n$, $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}$ のとき:

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_m \mathbf{a}_m:$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ の 1 次結合

c_1, c_2, \dots, c_m 係数 ($(c_i) \in \mathbf{R}^m$: 係数ベクトル)

\mathbf{R}^n のベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : \text{基本ベクトル}$$

任意の $\mathbf{a} = (a_i) \in \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (3 \times 4)\text{行列 (matrix)} \\ \text{行列の型 (サイズ)} \end{array}$$

※ 行列の横の並びには “,” を使わず、適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列 「 n 行 m 列の行列」

横の列 = 行 (row) 第 i 行 ($i = 1, 2, \dots, n$)

縦の列 = 列 (column) 第 j 列 ($\in \mathbf{R}^n$) ($j = 1, 2, \dots, m$)

i 行と j 列の交点の数 = (i, j) 成分 $A = (a_{ij})$: (i, j) 成分が a_{ij}

$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_m)$, 第 j 列ベクトルが $\mathbf{a}_j \in \mathbf{R}^n$

(例) $M = (\mathbf{m}_1 \ \mathbf{m}_2 \ \mathbf{m}_3 \ \mathbf{m}_4)$, $\mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

注. 第 i 行 $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im})$ を行ベクトルとよぶ.

注. $n \times 1$ 行列 (列ベクトル) は n 次元ベクトルとみなす.

行列の演算

行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, ...

[等価] $A = B \Leftrightarrow A, B$ の型が一致かつ $a_{ij} = b_{ij} (\forall i, j)$

[加減] A, B の型が等しいとき, $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

注. A, B の型が等しくないときは加減は定義されない

[スカラー倍] $cA = (ca_{ij})$, $c \in \mathbf{R}$

[積] AB : いつ定義され, どう定義されるか?

行列の積 (行 × 列)

行ベクトル (1 2 3) と列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の積

$$\text{基本: } (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 3 \times 5$$

$$\text{i.e. } (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

行列の積 (一般)

- ・ A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- ・ AB の (i, j) 成分 = A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル \mathbf{a}^i , B の第 j 列ベクトル \mathbf{b}_j

$\rightsquigarrow AB$ の (i, j) 成分 = $\mathbf{a}^i \mathbf{b}_j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} \\ \boxed{2} & \boxed{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \boxed{3} & \boxed{5} \\ 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \boxed{3+1} & 5-1 \\ -2 & +3 & \boxed{6-3} & \boxed{10+3} \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 3 \qquad 2 \times 3$

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 3s + 0t \\ -s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍の和 = 線形結合 (1 次結合)

$\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^3$ 基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad A \times \mathbf{e}_i : \text{“第 } i \text{ 列の取り出し”}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (p \ q \ r) = \begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bp & bq & br \\ cp & cq & cr \end{pmatrix} \neq ap + bq + cr$$

行列の積の性質

$$(AB)C = A(BC) \text{ (結合法則)}$$

$$A(B + C) = AB + AC \text{ (分配法則)}$$

$$(A + B)C = AC + BC \text{ (分配法則)}$$

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

注. 結合法則 $\rightsquigarrow A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$, $A^n\mathbf{x}$ etc...

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} (ap + br)x + (aq + bs)z & (ap + br)y + (aq + bs)w \\ (cp + dr)x + (cq + ds)z & (cp + dr)y + (cq + ds)w \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} px + qz & py + qw \\ rx + sz & ry + sw \end{pmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a(px + qz) + b(rx + sz) & a(py + qw) + b(ry + sw) \\ c(px + qz) + d(rx + sz) & c(py + qw) + d(ry + sw) \end{pmatrix}$$

e.g. (1, 1) 成分はいずれも $apx + brx + aqz + bsz$

結合法則の証明*

$$A : p \times q, B : q \times r, C : r \times s \quad A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$$

$$(AB)C \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{l=1}^r (AB)_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^r \left(\sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$A(BC) \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^q a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^q a_{ik} \left(\sum_{l=1}^r b_{kl} c_{lj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

cf. 2×2 の例の $(1, 1)$ 成分はいずれも $apx + brx + aqz + bsz$