線形代数 I 「数ベクトルと行列」

吉冨 賢太郎

April 21, 2017

数ベクトル

数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \ , \ldots ,$$

数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \; , \ldots , \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$$

(※簡単のため $(x_i)_{i=1}^n$ または単に (x_i) と略記)

数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \ , \ldots, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$$

(※簡単のため $(x_i)_{i=1}^n$ または単に (x_i) と略記)

$\boldsymbol{x}$: n 次 (実) 数ベクトル, $\boldsymbol{R}^n$: n 次実数ベクトル空間

数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \ , \ldots, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$$

(※簡単のため $(x_i)_{i=1}^n$ または単に (x_i) と略記)

$\boldsymbol{x}$: n 次 (実) 数ベクトル, $\boldsymbol{R}^n$: n 次実数ベクトル空間

・応用例: (big) データをならべた数ベクトル

$\rightsquigarrow$ 推移行列との積で変動を予想

数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3\ , \dots ,\qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$$

(※簡単のため $(x_i)_{i=1}^n$ または単に (x_i) と略記)

$\boldsymbol{x}$: n 次 (実) 数ベクトル, $\boldsymbol{R}^n$: n 次実数ベクトル空間

・応用例: (big) データをならべた数ベクトル
$\rightsquigarrow$ 推移行列との積で変動を予想

・一般の n で数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の性質を調べるのが自然

数ベクトルの演算

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i), \boldsymbol{z} = (z_i) \in \boldsymbol{R}^n,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$$

数ベクトルの演算

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i), \boldsymbol{z} = (z_i) \in \boldsymbol{R}^n,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$$

[等価] $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, (\forall i)$

数ベクトルの演算

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i), \boldsymbol{z} = (z_i) \in \boldsymbol{R}^n,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$$

[等価] $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, (\forall i)$

[加減] $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = (x_i) \pm (y_i) = (x_i \pm y_i)$

数ベクトルの演算

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i), \boldsymbol{z} = (z_i) \in \boldsymbol{R}^n,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$$

[等価] $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, (\forall i)$

[加減] $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = (x_i) \pm (y_i) = (x_i \pm y_i)$

[零ベクトル] $\boldsymbol{0} = (0)$ すべての成分が 0

数ベクトルの演算

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i), \boldsymbol{z} = (z_i) \in \boldsymbol{R}^n,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$$

[等価] $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, (\forall i)$

[加減] $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = (x_i) \pm (y_i) = (x_i \pm y_i)$

[零ベクトル] $\boldsymbol{0} = (0)$ すべての成分が 0

[スカラー倍] $c\boldsymbol{x} = c(x_i) = (cx_i)$

数ベクトルの演算

$$\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i), \boldsymbol{z} = (z_i) \in \boldsymbol{R}^n,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}$$

[等価] $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, (\forall i)$

[加減] $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = (x_i) \pm (y_i) = (x_i \pm y_i)$

[零ベクトル] $\boldsymbol{0} = (0)$ すべての成分が 0

[スカラー倍] $c\boldsymbol{x} = c(x_i) = (cx_i)$

ただし，$(-1)\boldsymbol{x}$ は $-\boldsymbol{x}$ と書く：（$\boldsymbol{x}$ の逆ベクトル）

数ベクトルの演算の性質

数ベクトルの演算の性質

・$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ . . . . (加法の結合法則)

数ベクトルの演算の性質

- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ . . . . (加法の結合法則)
- $\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ . . . . ($\mathbf{0}$ 加法単位元)

数ベクトルの演算の性質

- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ .... (加法の結合法則)
- $\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ .... ($\mathbf{0}$ 加法単位元)
- $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ .... ($-\boldsymbol{x}$ 加法逆元)

数ベクトルの演算の性質

- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ . . . . (加法の結合法則)
- $\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ . . . . ($\mathbf{0}$ 加法単位元)
- $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ . . . . ($-\boldsymbol{x}$ 加法逆元)
- $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ . . . . (可換性)

数ベクトルの演算の性質

・$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ .... (加法の結合法則)

・$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ .... ($\mathbf{0}$ 加法単位元)

・$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ .... ($-\boldsymbol{x}$ 加法逆元)

・$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ .... (可換性)

★ $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$ .... (スカラー倍の結合法則)

数ベクトルの演算の性質

・$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ .... (加法の結合法則)

・$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ .... ($\mathbf{0}$ 加法単位元)

・$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ .... ($-\boldsymbol{x}$ 加法逆元)

・$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ .... (可換性)

★ $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$ .... (スカラー倍の結合法則)

▷ $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$ .... (分配法則 1)

▷ $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$ .... (分配法則 2)

数ベクトルの演算の性質

- $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ .... (加法の結合法則)
- $\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ .... ($\mathbf{0}$ 加法単位元)
- $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ .... ($-\boldsymbol{x}$ 加法逆元)
- $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ .... (可換性)

★ $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$ .... (スカラー倍の結合法則)

▷ $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$ .... (分配法則 1)

▷ $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$ .... (分配法則 2)

★ $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ .... (1 の作用)

数ベクトルの演算の性質

・$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ ....(加法の結合法則)

・$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ ....($\mathbf{0}$ 加法単位元)

・$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ ....($-\boldsymbol{x}$ 加法逆元)

・$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ ....(可換性)

★ $a(b\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}$ ....(スカラー倍の結合法則)

▷ $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$ ....(分配法則 1)

▷ $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$ ....(分配法則 2)

★ $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ ....(1 の作用)

※　上のような性質を持つ加法とスカラー倍を持つ集合は他にも沢山ある．考えてみよう．

1 次結合と基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 次結合と基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \boldsymbol{R}$ のとき:

1 次結合と基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \boldsymbol{R}$ のとき:

$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$:

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の 1 次結合

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ 係数 ($(c_i) \in \boldsymbol{R}^m$: 係数ベクトル)

1 次結合と基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \boldsymbol{R}^n$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \boldsymbol{R}$ のとき:

$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m \boldsymbol{a}_m$:

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の 1 次結合

$c_1, c_2, \ldots, c_m$ 係数 ($(c_i) \in \boldsymbol{R}^m$: 係数ベクトル)

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$:基本ベクトル

任意の $\boldsymbol{a} = (a_i) \in \boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$

行列の定義と表現

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \underline{(3 \times 4)} \text{ 行列 (matrix)}$$

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける．

$A : n \times m$ 行列

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける．

$A : n \times m$ 行列

横の列 $=$ 行 (row)

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける．

$A : n \times m$ 行列

横の列 ＝ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 ＝ 列 (column)

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

i 行と j 列の交点の数 $= (i, j)$ 成分

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

i行とj列の交点の数$=(i, j)$ 成分 $A = (a_{ij})$:(i, j) 成分が a_{ij}

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

i行とj列の交点の数$=(i, j)$ 成分　$A = (a_{ij})$:(i, j) 成分が a_{ij}

$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_m)$，第 j 列ベクトルが $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{R}^n$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける．

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

i 行と j 列の交点の数 $= (i, j)$ 成分　$A = (a_{ij})$:(i, j) 成分が a_{ij}

$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_m)$，第 j 列ベクトルが $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{R}^n$

(例) $M = (\boldsymbol{m}_1 \ \boldsymbol{m}_2 \ \boldsymbol{m}_3 \ \boldsymbol{m}_4)$, $\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける．

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 $=$ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 $=$ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

i行とj列の交点の数$=(i, j)$ 成分　$A = (a_{ij})$:(i, j) 成分が a_{ij}

$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_m)$，第 j 列ベクトルが $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{R}^n$

(例) $M = (\boldsymbol{m}_1\ \boldsymbol{m}_2\ \boldsymbol{m}_3\ \boldsymbol{m}_4)$, $\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

注．第 i 行 $(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{im})$ を行ベクトルとよぶ．

行列の定義と表現

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\underline{(3 \times 4)}$ 行列 (matrix)

行列の型 (サイズ)

※ 行列の横の並びには “,” を使わず，適切な空白をあける.

$A : n \times m$ 行列　　「n 行 m 列の行列」

横の列 ＝ 行 (row) 第 i 行 $(i = 1, 2, \ldots, n)$

縦の列 ＝ 列 (column) 第 j 列 $(\in \boldsymbol{R}^n)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$

i 行と j 列の交点の数 ＝ (i, j) 成分　$A = (a_{ij})$:(i, j) 成分が a_{ij}

$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_m)$，第 j 列ベクトルが $\boldsymbol{a}_j \in \boldsymbol{R}^n$

(例) $M = (\boldsymbol{m}_1\ \boldsymbol{m}_2\ \boldsymbol{m}_3\ \boldsymbol{m}_4)$, $\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

注．第 i 行 $(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{im})$ を行ベクトルとよぶ.

注．$n \times 1$ 行列 (列ベクトル) は n 次数ベクトルとみなす.

行列の演算

行列の演算

行列 $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ \ldots$

行列の演算

行列 $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ \ldots$

[等価] $A = B \Leftrightarrow A, B$ の型が一致かつ $a_{ij} = b_{ij}\ (\forall i, j)$

行列の演算

行列 $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}),\ \ldots$

[等価] $A=B \Leftrightarrow A, B$ の型が一致かつ $a_{ij}=b_{ij}\ (\forall i,j)$

[加減] A, B の型が等しいとき，$A \pm B=(a_{ij} \pm b_{ij})$

注．A, B の型が等しくないときは加減は定義されない

行列の演算

行列 $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ \ldots$

[等価] $A = B \Leftrightarrow A, B$ の型が一致かつ $a_{ij} = b_{ij}\ (\forall i, j)$

[加減] A, B の型が等しいとき，$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

注．A, B の型が等しくないときは加減は定義されない

[スカラー倍] $cA = (ca_{ij}),\ c \in \boldsymbol{R}$

行列の演算

行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, ...

[等価] $A = B \Leftrightarrow A, B$ の型が一致かつ $a_{ij} = b_{ij}$ $(\forall i, j)$

[加減] A, B の型が等しいとき, $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$

注. A, B の型が等しくないときは加減は定義されない

[スカラー倍] $cA = (ca_{ij})$, $c \in \boldsymbol{R}$

[積] AB : いつ定義され, どう定義されるか?

行列の積 (行 × 列)

行列の積 (行 × 列)

行ベクトル $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の積

行列の積 (行 × 列)

行ベクトル $(1\ \ 2\ \ 3)$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の積

基本：$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\times4+2\times(-1)+3\times5$

行列の積 (行 × 列)

行ベクトル $(1\ 2\ 3)$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の積

基本：$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{1}\times\mathbf{4}+\mathbf{2}\times(\mathbf{-1})+\mathbf{3}\times\mathbf{5}$

行列の積 (行 × 列)

行ベクトル $(1\ \ 2\ \ 3)$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の積

基本： $(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\times 4 + 2\times(-1) + 3\times 5$

$$\text{i.e. } (a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

行列の積 (行 × 列)

行ベクトル $(1\ \ 2\ \ 3)$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の積

基本：$(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\times 4 + 2\times(-1) + 3\times 5$

$$\text{i.e. } (a_1\ \ a_2\ \ \ldots\ \ a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

行列の積 (一般)

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i, j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i, j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i, j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i, j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i, j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

行列の積 (一般)

・A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.

・AB の (i,j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i,j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix}$$

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i, j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i, j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}$$

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i,j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i,j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i,j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i,j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i\boldsymbol{b}_j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{{\color{red}2} \times {\color{blue}3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{{\color{blue}3} \times {\color{cyan}1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}}_{{\color{red}2} \times {\color{cyan}1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列の積 (一般)

・A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.

・AB の (i,j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i,j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \underbrace{= \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 & 3+1 & 5-1 \\ -2+3 & 6-3 & 10+3 \end{pmatrix}$$

行列の積 (一般)

- A の列数と B の行数が同じ場合に限り定義される.
- AB の (i,j) 成分 $=$ A の i 行と B の j 列の積

A の第 i 行ベクトル $\boldsymbol{a}^i$, B の第 j 列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$

$\rightsquigarrow$ AB の (i,j) 成分 $= \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{b}_j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 7 \\ 4 \times 3 + (-1) \times 5 + 0 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} -1-1 & 3+1 & 5-1 \\ -2+3 & 6-3 & 10+3 \end{pmatrix}}$$

行列の積 例

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 3s + 0t \\ -s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 3s + 0t \\ -s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 3s + 0t \\ -s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍の和 = 線形結合 (1 次結合)

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 3s + 0t \\ -s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍の和 = 線形結合 (1 次結合)

$\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^3$ 基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$, $A \times \boldsymbol{e}_i$: "第 i 列の取り出し"

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t \\ 3s + 0t \\ -s + 4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍の和 = 線形結合 (1 次結合)

$\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^3$ 基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$, $A \times \boldsymbol{e}_i$: "第 i 列の取り出し"

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (p \quad q \quad r)$$

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+0t \\ -s+4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍の和 = 線形結合 (1 次結合)

$\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^3$ 基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$, $A \times \boldsymbol{e}_i$: "第 i 列の取り出し"

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bp & bq & br \\ cp & cq & cr \end{pmatrix}$$

行列の積 例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ 3s+0t \\ -s+4t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍の和 = 線形結合 (1 次結合)

$\boldsymbol{e}_i \in \boldsymbol{R}^3$ 基本ベクトル

$$\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$, $A \times \boldsymbol{e}_i$: “第 i 列の取り出し”

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & aq & ar \\ bp & bq & br \\ cp & cq & cr \end{pmatrix} \neq ap + bq + cr$$

行列の積の性質

行列の積の性質

$$(AB)C = A(BC) \text{ (結合法則)}$$

行列の積の性質

$(AB)C = A(BC)$ (結合法則)

$A(B + C) = AB + AC$ (分配法則)

行列の積の性質

$(AB)C = A(BC)$ (結合法則)

$A(B + C) = AB + AC$ (分配法則)

$(A + B)C = AC + BC$ (分配法則)

行列の積の性質

$$(AB)C = A(BC) \text{ (結合法則)}$$

$$A(B + C) = AB + AC \text{ (分配法則)}$$

$$(A + B)C = AC + BC \text{ (分配法則)}$$

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

行列の積の性質

$$(AB)C = A(BC) \ (\text{結合法則})$$

$$A(B+C) = AB + AC \ (\text{分配法則})$$
$$(A+B)C = AC + BC \ (\text{分配法則})$$
$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

注. 結合法則 $\rightsquigarrow A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$, $A^n\boldsymbol{x}$ etc...

行列の積の性質

$$(AB)C = A(BC) \text{ (結合法則)}$$

$$A(B+C) = AB + AC \text{ (分配法則)}$$
$$(A+B)C = AC + BC \text{ (分配法則)}$$
$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

注. 結合法則 $\rightsquigarrow A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$, $A^n\boldsymbol{x}$ etc...

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} (ap+br)x+(aq+bs)z & (ap+br)y+(aq+bs)w \\ (cp+dr)x+(cq+ds)z & (cp+dr)y+(cq+ds)w \end{pmatrix}$$

行列の積の性質

$$(AB)C = A(BC) \text{ (結合法則)}$$

$$A(B+C) = AB + AC \text{ (分配法則)}$$
$$(A+B)C = AC + BC \text{ (分配法則)}$$
$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

注．結合法則 $\rightsquigarrow$ $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$, $A^n\boldsymbol{x}$ etc...

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} (ap+br)x+(aq+bs)z & (ap+br)y+(aq+bs)w \\ (cp+dr)x+(cq+ds)z & (cp+dr)y+(cq+ds)w \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} px+qz & py+qw \\ rx+sz & ry+sw \end{pmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a(px+qz)+b(rx+sz) & a(py+qw)+b(ry+sw) \\ c(px+qz)+d(rx+sz) & c(py+qw)+d(ry+sw) \end{pmatrix}$$

行列の積の性質

$(AB)C = A(BC)$ (結合法則)

$A(B+C) = AB + AC$ (分配法則)
$(A+B)C = AC + BC$ (分配法則)
$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

注. 結合法則 $\rightsquigarrow$ $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$, $A^n\boldsymbol{x}$ etc...

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} (ap+br)x+(aq+bs)z & (ap+br)y+(aq+bs)w \\ (cp+dr)x+(cq+ds)z & (cp+dr)y+(cq+ds)w \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} px+qz & py+qw \\ rx+sz & ry+sw \end{pmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} a(px+qz)+b(rx+sz) & a(py+qw)+b(ry+sw) \\ c(px+qz)+d(rx+sz) & c(py+qw)+d(ry+sw) \end{pmatrix}$$

e.g. $(1,1)$ 成分はいずれも $apx + brx + aqz + bsz$

結合法則の証明*

$A : p \times q,\ B : q \times r,\ C : r \times s \quad A = (a_{ij})\ ,\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$

結合法則の証明*

$A: p \times q$, $B: q \times r$, $C: r \times s$ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$

$(AB)C$ の (i, j) 成分 $= \sum_{l=1}^{r} (AB)_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} (\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kl}) c_{lj}$

$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

結合法則の証明*

$A : p \times q,\ B : q \times r,\ C : r \times s\ \ A = (a_{ij})\ ,\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$

$$(AB)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{l=1}^{r} (AB)_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} (\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kl}) c_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$A(BC) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} (AB)_{kj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} (\sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj})$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

結合法則の証明*

$A : p \times q,\ B : q \times r,\ C : r \times s\ \ A = (a_{ij})\ ,\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$

$(AB)C$ の (i,j) 成分 $= \sum_{l=1}^{r} (AB)_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} (\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kl}) c_{lj}$

$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

$A(BC)$ の (i,j) 成分 $= \sum_{k=1}^{q} a_{ik} (AB)_{kj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} (\sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj})$

$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$

cf. 2×2 の例の $(1,1)$ 成分はいずれも $apx + brx + aqz + bsz$

転置行列と行列の積

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列： 転置行列

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^t\!A = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列： 転置行列

例. $${}^t\!\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3),\quad {}^t\!\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列 : 転置行列

例. ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^tcA = c\,{}^tA$

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列： 転置行列

例. ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^tcA = c\,{}^tA \qquad {}^t({}^tA) = A$

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列 : 転置行列

例. ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^tcA = c\,{}^tA \qquad {}^t({}^tA) = A \qquad \underline{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

$\because$ $A : p \times q$, $B : q \times r$ 両辺のサイズは $r \times p$ で一致

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列 : 転置行列

例. ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^tcA = c\,{}^tA \qquad {}^t({}^tA) = A \qquad \underline{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

$\because$ $A : p \times q$, $B : q \times r$ 両辺のサイズは $r \times p$ で一致

${}^t(AB)$ の (i, j) 成分 $= (AB)$ の (j, i) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{jk} b_{ki}$

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列：転置行列

例. ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^tcA = c\,{}^tA \quad {}^t({}^tA) = A \quad \underline{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

$\because$ $A : p \times q$, $B : q \times r$ 両辺のサイズは $r \times p$ で一致

${}^t(AB)$ の (i, j) 成分 $= (AB)$ の (j, i) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{jk} b_{ki}$

a_{jk} は ${}^tA$ の (k, j) 成分, b_{ki} は ${}^tB$ の (i, k) 成分

転置行列と行列の積

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$

$\rightsquigarrow\ {}^tA = (a_{ji})$ $n \times m$ 行列：転置行列

例. ${}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^tcA = c\,{}^tA \qquad {}^t({}^tA) = A \qquad \underline{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

$\because\ A : p \times q,\ B : q \times r$ 両辺のサイズは $r \times p$ で一致

${}^t(AB)$ の (i, j) 成分 $= (AB)$ の (j, i) 成分 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{jk} b_{ki}$

a_{jk} は ${}^tA$ の (k, j) 成分, b_{ki} は ${}^tB$ の (i, k) 成分

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{q} {}^tB_{ik}\,{}^tA_{kj} = {}^tB\,{}^tA$ の (i, j) 成分

$${}^t\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right\} = {}^t\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

行列の積とブロック分け

行列の積とブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

行列の積とブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

※ 行列の積が定義されるようにブロック分けしている場合

※ $\sum$ の計算を部分的に分けているだけ．各自確かめよう．

行列の積とブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

※ 行列の積が定義されるようにブロック分けしている場合

※ $\sum$ の計算を部分的に分けているだけ．各自確かめよう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+2\times 6+0\times 1+0\times 5 & 1\times 1+2\times 3+0\times 4+0\times 1 \\ 3\times 2+4\times 6+0\times 1+0\times 5 & 3\times 1+4\times 3+0\times 4+0\times 1 \\ 2\times 2+3\times 6+1\times 1+2\times 5 & 2\times 1+3\times 3+1\times 4+2\times 1 \end{pmatrix}$$

行列の積とブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

※ 行列の積が定義されるようにブロック分けしている場合

※ $\sum$ の計算を部分的に分けているだけ．各自確かめよう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2+2\times 6+0\times 1+0\times 5 & 1\times 1+2\times 3+0\times 4+0\times 1 \\ 3\times 2+4\times 6+0\times 1+0\times 5 & 3\times 1+4\times 3+0\times 4+0\times 1 \\ 2\times 2+3\times 6+1\times 1+2\times 5 & 2\times 1+3\times 3+1\times 4+2\times 1 \end{pmatrix}$$

行列の積とブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

※ 行列の積が定義されるようにブロック分けしている場合

※ $\sum$ の計算を部分的に分けているだけ．各自確かめよう．

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 6 + 0 \times 1 + 0 \times 5 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 4 + 0 \times 1 \\ 3 \times 2 + 4 \times 6 + 0 \times 1 + 0 \times 5 & 3 \times 1 + 4 \times 3 + 0 \times 4 + 0 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times 6 + 1 \times 1 + 2 \times 5 & 2 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 1 \end{pmatrix}$$

行列の積とブロック分け

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

※ 行列の積が定義されるようにブロック分けしている場合

※ $\sum$ の計算を部分的に分けているだけ．各自確かめよう．

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \quad \begin{array}{c} P \\ Q \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 6 + 0\times 1 + 0\times 5 & 1\times 1 + 2\times 3 + 0\times 4 + 0\times 1 \\ 3\times 2 + 4\times 6 + 0\times 1 + 0\times 5 & 3\times 1 + 4\times 3 + 0\times 4 + 0\times 1 \\ 2\times 2 + 3\times 6 + 1\times 1 + 2\times 5 & 2\times 1 + 3\times 3 + 1\times 4 + 2\times 1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} AP + BQ \\ CP + DQ \end{pmatrix}$$