線形代数 I 「平面・空間ベクトル」

吉冨 賢太郎

April 20, 2017

ベクトル

高校まで: ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{v}$, ...

成分 $(2,3)$, $(1,2,-1)$

これから: ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$

成分 (数ベクトル) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

点とその位置ベクトルを同一視

例 平面の点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 空間の点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

ベクトルの内積・長さ

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積の記号：　高校まで $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ ，これから $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の長さ $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が直交 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}), \qquad (c\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_2)$$

$$(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})$$

平面の直線 (高校の復習)

直線 $3x + 7y = 1$ とベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ の関係 $\Rightarrow$ 直交

$\because$ 点 $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を通り $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ に直交する直線を ℓ

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が ℓ 上の任意の点

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ が直交 $\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ $\Leftrightarrow$ $3x + 7y = 1$

一般に $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に垂直な直線は $ax + by = k$

注 $\boldsymbol{n}$ は法線ベクトルという.

$k = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ は通る点 $\boldsymbol{p}$ の取り方によらない.

$\because$ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$ 通る 2 点 $\Rightarrow$ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') = 0$ $\Rightarrow$ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}')$

空間における平面の方程式

平面は通る 1 点 $\boldsymbol{p}$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で定まる

平面の方程式 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) = 0$

$\Leftrightarrow (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \ k = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{平面の方程式 } ax + by + cz = k}$

注 ・空間における平面の方程式

= 平面における直線の方程式の自然な拡張

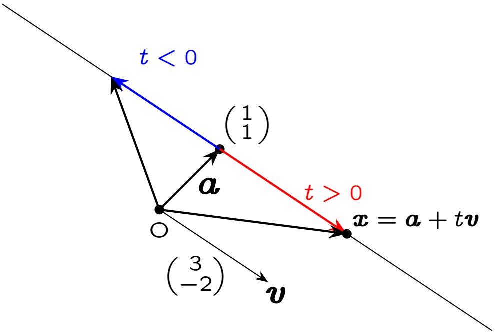
・直線において 1 つの 1 次方程式で定まる集合 = 直線

・空間において 1 つの 1 次方程式で定まる集合 = 平面

直線のパラメータ表示

直線 $2x + 3y = 5$: $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ に平行, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を通る

$\Rightarrow$ 直線上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ と書ける



直線のパラメータ表示 (空間)

直線 ℓ : $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を通る

$\Rightarrow$ ℓ 上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: パラメータ表示

$$(t =)\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$: 方程式

平面

平面 $\Rightarrow$ 平面と平面の交わり:直線

平面のパラメータ表示 (方程式から)

☆ 平面上のベクトルは平面上の平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ で $s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} (s, t \in \boldsymbol{R})$ と書ける

平面 $3x + 4y - 5z = 2$: $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を通って,

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行

平面上の任意の点 $\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \quad (s, t \in \boldsymbol{R})$

平面のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ $(s, t \in \boldsymbol{R})$
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は平面に平行な互いに平行でないベクトル $(\neq \boldsymbol{0})$

平面のパラメータ表示 (3 点から)

平面上の 1 直線上にない 3 点 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$$

1 直線上にない 3 点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + t(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$

$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = 0$

方程式を満たす 3 点

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$(例)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}$(例)

1 点 $\boldsymbol{a}$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$

方程式 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$

1 点 $\boldsymbol{a}$ と平面に平行なベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$

$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = 0$

$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = 0$

平面 π の決定条件と表現の関係

課題

平面の方程式からパラメータ表示，パラメータ表示から平面の方程式を求められるようにしておこう．