線形代数 I 「写像」

吉冨 賢太郎

April 14, 2017

写像の定義と例

A, B : 集合, f: A から B への写像 ($f : A \to B$) とは

「各 $a \in A$ に対し, $b \in B$ を定める規則」

のこと. $b = f(a)$ または $f : a \mapsto b$ と書く.

A を始域 (定義域), B を終域 (~~値域~~) という.

写像の定義と例

A, B : 集合, f: A から B への写像 ($f : A \to B$) とは

「各 $a \in A$ に対し, $b \in B$ を定める規則」

のこと. $b = f(a)$ または $f : a \mapsto b$ と書く.

A を始域 (定義域), B を終域 (~~値域~~) という.

例 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(m) = m + 1$ で定めると, $f(2) = 3$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると, $f : -1 \mapsto 1$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$ で定めると

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

写像の定義と例

A, B : 集合, f: A から B への写像 ($f : A \to B$) とは

「各 $a \in A$ に対し, $b \in B$ を定める規則」

のこと. $b = f(a)$ または $f : a \mapsto b$ と書く.

A を始域 (定義域), B を終域 (~~値域~~) という.

例 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(m) = m + 1$ で定めると, $f(2) = 3$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると, $f : -1 \mapsto 1$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$ で定めると

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

注 特に $B = \mathbb{R}$ のとき写像を関数ともいう.

像

A, B 集合, $f : A \to B$ 写像, $S \subset A$

$f(S) = \{f(a) \mid a \in S\} \subset B$: f による S の像

$f(A)$ を単に f の像と呼び, $\mathrm{Im}\, f$ とも書く.

像

A, B 集合, $f : A \to B$ 写像, $S \subset A$

$f(S) = \{f(a) \mid a \in S\} \subset B$: f による S の像

$f(A)$ を単に f の像と呼び, $\mathrm{Im}\, f$ とも書く.

★ $b \in B$ が $b \in f(A)$

$\Leftrightarrow b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在する

像

A, B 集合, $f : A \to B$ 写像, $S \subset A$

$f(S) = \{f(a) \mid a \in S\} \subset B$: f による S の像

$f(A)$ を単に f の像と呼び, $\mathrm{Im}\, f$ とも書く.

★ $b \in B$ が $b \in f(A)$

$$\Leftrightarrow b = f(a) \text{ となる } a \in A \text{ が存在する}$$

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

$$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}_{\geqq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$

$$\mathrm{Im}\, f = [-1, 1] (= \left\{x | -1 \leqq x \leqq 1\right\})$$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(m) = m$ を 3 で割った余り

$$\mathrm{Im}\, f = \{0, 1, 2\}$$

合成・恒等写像・逆写像

A, B, C 集合, $f : A \to B$, $g : B \to C$ 写像

$g \circ f : A \to C$, $a \mapsto g(f(a))$: f と g の合成写像

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

合成・恒等写像・逆写像

A, B, C 集合, $f : A \to B$, $g : B \to C$ 写像

$g \circ f : A \to C$, $a \mapsto g(f(a))$: f と g の合成写像

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

$1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$ 恒等写像

$$\Rightarrow 1_B \circ f = f \circ 1_A = f$$

合成・恒等写像・逆写像

A, B, C 集合, $f : A \to B$, $g : B \to C$ 写像

$g \circ f : A \to C$, $a \mapsto g(f(a))$: f と g の合成写像

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$

$1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$ 恒等写像

$$\Rightarrow 1_B \circ f = f \circ 1_A = f$$

$h : B \to A$ 逆写像 $(f^{-1}) \Leftrightarrow f \circ h = 1_B$, $h \circ f = 1_A$

例 $f(x) = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$ (逆関数)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow f \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$ i.e. $f^{-1} = f$

全射と単射

★ 写像 $f : A \to B$ が全射 $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ は $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}$ なので全射でない.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ と考えれば全射.

i.e. 終域を像に制限すれば常に全射.

全射と単射

★ 写像 $f : A \to B$ が全射 $\Leftrightarrow$ $f(A) = B$

例 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ は $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}$ なので全射でない.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ と考えれば全射.

i.e. 終域を像に制限すれば常に全射.

★ 写像 $f : A \to B$ が単射
$\Leftrightarrow$ $a, a' \in A$ に対し, $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
$\Leftrightarrow$ $a, a' \in A$ に対し, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

例 $f(x) = x^3$ は $a^3 = b^3$, $a, b \in \mathbb{R}$ ならば $a = b$ なので単射.

$f(x) = x^2$ は $f(1) = f(-1)$ なので単射でない.

ただし, f を $\mathbb{R}_{\geqq 0}$ に制限すれば単射.

i.e. 定義域を適当な部分集合に制限すれば単射.

全単射と逆写像

$f : A \to B$ 全単射 $\Leftrightarrow$ f 全射 かつ 単射

例 $1_A : A \to A$ 恒等写像は全単射

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ は全単射

$g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$ は全単射

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ は全単射

全単射と逆写像

$f : A \to B$ 全単射 $\Leftrightarrow$ f 全射 かつ 単射

例 $1_A : A \to A$ 恒等写像は全単射

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ は全単射

$g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$ は全単射

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ は全単射

★ $f : A \to B$ に逆写像が存在 $\Leftrightarrow$ f 全単射

例 $1_A^{-1} = 1_A$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$,

$g^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$, $\quad h^{-1}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$