

# 線形代数 I 「集合」

吉富 賢太郎

April 14, 2017

# 集合の定義

集合： 数学的または客観的に定まる'物'の集まり，  
集合を構成する'物'を要素または元という。

$x$  が集合  $A$  の要素であることを

$$x \in A \text{ または } A \ni x$$

で表す。2つの集合は要素が同じである場合に限り等しい。

$$A = B \Leftrightarrow \left[ x \in A \Leftrightarrow x \in B \right]$$

要素を持たない集合 = 空集合 ( $\emptyset$ )

**注** 集合を要素とする集合も考える。

ただし、それ自身を要素として含む集合は考えない。

**注** 集合と要素は容器と中身をイメージすればよい。

ただし、中身が同じ容器は同じと見なす。

# 集合の例

有限集合 ... 要素が有限個の集合

例.  $\emptyset$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{p, q, r, s\}$ , ...

$$1 \in \{1, 2, 3\}, \{p, r, s\} \not\subseteq a$$

有限集合  $A$  の要素の数を  $|A|$  (または  $\#(A)$ ) で表す.

無限集合 ... 要素が有限個でない (無限にある) 集合

例.  $\mathbb{N}$  自然数全体       $\mathbb{Z}$  整数全体       $\mathbb{Q}$  有理数全体

$$-1 \in \mathbb{Z}, -1 \notin \mathbb{N}, \mathbb{Q} \not\subseteq \sqrt{2}$$

$\mathbb{R}$  実数全体       $\mathbb{C}$  複素数全体

$$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}, \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$  平面ベクトル全体       $\mathbb{R}^3$  空間ベクトル全体

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^3$$

**注** 高校では  $(1, 2)$  や  $(0, -1, 3)$  と表記したが, 大学では上のよう表す.

# 集合の包含関係

集合  $A$  の要素がすべて集合  $B$  の要素であるとき、 $A$  は  $B$  の部分集合といい、 $A \subset B$  または  $B \supset A$  と表す。

**注**  $A \subset B$  は  $A = B$  の場合も含む。

また、空集合はすべての集合の部分集合である。

**例.**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \quad \{1, 2\} \not\subset \{1, 3, 5\}$$

**注**  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  と考えない (自然な方法はない)

$\mathcal{P}(A)$  :  $A$  の部分集合全体の集合 ( $A$  のべき集合)

**注** べき集合は  $2^A$  と書く

**例.**  $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

**注.** 有限集合  $A$  の要素の数が  $n$  のとき、 $2^A$  の要素の数は  $2^n$  .

# 集合の記述

## ★ 外延的記法：

集合の要素の全てまたは一部の列挙による記述  
直感的にわかりやすい

例.  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$  正の偶数全体

$\{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$  奇数全体

## ★ 内包的記法：

要素の満たす条件や式による記述. 論理的に正確.  
集合の等価性や包含を論証する場合に必要.

例.  $\{2m \mid m \in \mathbb{N}\}$  正の偶数全体

$\left\{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$  直線  $y = x$

## 記号のまとめ

$A$  : 集合

$x$  は  $A$  の要素 :  $x \in A$  または  $A \ni x$

$x$  は  $A$  の要素ではない :  $x \notin A$  または  $A \not\ni x$

$A, B$  : 集合

$A \subset B$  ,  $B \supset A$  ...  $A$  は  $B$  の部分集合

$A \not\subset B$  ,  $B \not\supset A$  ...  $A$  は  $B$  の部分集合ではない