線形代数 I 「集合」

吉冨 賢太郎

April 14, 2017

集合の定義

集合： 数学的または客観的に定まる' 物' の集まり,

集合を構成する' 物' を要素または元という.

x が集合 A の要素であることを

$$x \in A \text{ または } A \ni x$$

で表す.

集合の定義

集合： 数学的または客観的に定まる' 物' の集まり，

集合を構成する' 物' を要素または元という．

x が集合 A の要素であることを

$$x \in A \text{ または } A \ni x$$

で表す．２つの集合は要素が同じである場合に限り等しい．

$$A = B \Leftrightarrow \text{「}x \in A \Leftrightarrow x \in B\text{」}$$

集合の定義

集合： 数学的または客観的に定まる' 物' の集まり,

集合を構成する' 物' を要素または元という.

x が集合 A の要素であることを

$$x \in A \text{ または } A \ni x$$

で表す. 2 つの集合は要素が同じである場合に限り等しい.

$$A = B \Leftrightarrow \text{「}x \in A \Leftrightarrow x \in B\text{」}$$

要素を持たない集合 ＝ 空集合 ($\emptyset$)

集合の定義

集合： 数学的または客観的に定まる' 物' の集まり，

集合を構成する' 物' を要素または元という．

x が集合 A の要素であることを

$$x \in A \text{ または } A \ni x$$

で表す． 2 つの集合は要素が同じである場合に限り等しい．

$$A = B \Leftrightarrow \text{「}x \in A \Leftrightarrow x \in B\text{」}$$

要素を持たない集合 ＝ 空集合 ($\emptyset$)

注 **集合を要素とする集合も考える．**
ただし，それ自身を要素として含む集合は考えない．

注 **集合と要素は容器と中身をイメージすればよい．**
ただし，中身が同じ容器は同じと見なす．

集合の例

有限集合 ... 要素が有限個の集合

例. $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\{p, q, r, s\}$, . . .

$1 \in \{1, 2, 3\}$, $\{p, r, s\} \not\ni a$

有限集合 A の要素の数を $|A|$ (または $\#(A)$) で表す.

集合の例

有限集合 ... 要素が有限個の集合

例. $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\{p, q, r, s\}$, . . .

$1 \in \{1, 2, 3\}$, $\{p, r, s\} \not\ni a$

有限集合 A の要素の数を $|A|$ (または $\#(A)$) で表す.

無限集合 ... 要素が有限個でない (無限にある) 集合

例. $\mathbb{N}$ 自然数全体 $\mathbb{Z}$ 整数全体 $\mathbb{Q}$ 有理数全体

$-1 \in \mathbb{Z}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2}$

$\mathbb{R}$ 実数全体 $\mathbb{C}$ 複素数全体

$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ 平面ベクトル全体 $\mathbb{R}^3$ 空間ベクトル全体

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^3$

集合の例

有限集合 ... 要素が有限個の集合

例. $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\{p, q, r, s\}$, . . .

$1 \in \{1, 2, 3\}$, $\{p, r, s\} \not\ni a$

有限集合 A の要素の数を $|A|$ (または $\#(A)$) で表す.

無限集合 ... 要素が有限個でない (無限にある) 集合

例. $\mathbb{N}$ 自然数全体　$\mathbb{Z}$ 整数全体　$\mathbb{Q}$ 有理数全体

$-1 \in \mathbb{Z}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2}$

$\mathbb{R}$ 実数全体　$\mathbb{C}$ 複素数全体

$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ 平面ベクトル全体　$\mathbb{R}^3$ 空間ベクトル全体

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^3$

注 **高校では** $(1, 2)$ **や** $(0, -1, 3)$ **と表記したが，大学では上のように表す.**

集合の包含関係

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき，A は B の部分集合といい，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．

注 $A \subset B$ **は** $A = B$ **の場合も含む．**
また，空集合はすべての集合の部分集合である．

集合の包含関係

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき，A は B の部分集合といい，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．

注 $A \subset B$ **は** $A = B$ **の場合も含む．**
また，空集合はすべての集合の部分集合である．

例． $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ $\qquad$ $\{1,2\} \not\subset \{1,3,5\}$

集合の包含関係

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき，A は B の部分集合といい，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．

注 $A \subset B$ **は** $A = B$ **の場合も含む．**
また，空集合はすべての集合の部分集合である．

例． $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $\{1, 2\} \not\subset \{1, 3, 5\}$

注 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ **と考えない (自然な方法はない)**

集合の包含関係

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき，A は B の部分集合といい，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．

注 $A \subset B$ **は** $A = B$ **の場合も含む．**
また，空集合はすべての集合の部分集合である．

例． $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $\{1, 2\} \not\subset \{1, 3, 5\}$

注 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ **と考えない (自然な方法はない)**

$\mathcal{P}(A)$ **：** A **の部分集合全体の集合 (**A **のべき集合)**

注 ベキ集合は 2^A **とも書く**

集合の包含関係

集合 A の要素がすべて集合 B の要素であるとき，A は B の部分集合といい，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．

注 $A \subset B$ **は** $A = B$ **の場合も含む．**
また，空集合はすべての集合の部分集合である．

例． $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$ $\qquad$ $\{1,2\} \not\subset \{1,3,5\}$

注 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ **と考えない (自然な方法はない)**

$\mathcal{P}(A)$ **：** A **の部分集合全体の集合（**A **のべき集合）**

注 ベキ集合は 2^A **とも書く**

例． $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

注．有限集合 A **の要素の数が** n **のとき，**2^A **の要素の数は** 2^n**．**

集合の記述

★ 外延的記法：

集合の要素の全てまたは一部の列挙による記述

直感的にわかりやすい

例. $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ 正の偶数全体

$\{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ 奇数全体

集合の記述

★ 外延的記法：

集合の要素の全てまたは一部の列挙による記述

直観的にわかりやすい

例. $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ 正の偶数全体

$\{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ 奇数全体

★ 内包的記法：

要素の満たす条件や式による記述．論理的に正確．

集合の等価性や包含を論証する場合に必要．

例. $\{2m \mid m \in \mathbb{N}\}$ 正の偶数全体

$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$ 直線 $y = x$

記号のまとめ

A：集合

x は A の要素：$x \in A$　または　$A \ni x$

x は A の要素ではない：$x \notin A$　または　$A \not\ni x$

A, B：集合

$A \subset B$，　$B \supset A$ … A は B の部分集合

$A \not\subset B$，　$B \not\supset A$ … A は B の部分集合ではない