2005 年度　線形数学 II　演習問題 (4)

1. V を 2 次以下の実数係数 1 変数多項式 $f(x)$ 全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $P_2(\mathbb{R})$ とする。V から V への 1 次写像 p に対して, V の基底 $[1, x, x^2]$ に関する p の表現行列を求めよ。

   (a) $p(f(x)) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} + \dfrac{df(x)}{dx}$

   (b) $p(f(x)) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} - 3f(x)$

   (c) $p(f(x)) = \dfrac{df(x)}{dx} + 5f(x)$

   (d) $p(f(x)) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} + x\dfrac{df(x)}{dx}$

   (e) $p(f(x)) = x\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x)$

2. 写像 $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ を, $f(x) \in P_2(\mathbb{R})$ に対して

$$T(f(x)) = 2x\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - (x+1)\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

   で定めるとき, 以下の問に答えよ。

   (a) T は線形写像であることを示せ。

   (b) $P^2(\mathbb{R})$ の基底 $[1,\ x,\ x^2]$ に関する T の表現行列を求めよ。

   (c) $\mathrm{Ker}\, T$ の次元を求めよ。

3. 2 次正方行列 A に対し、f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への 1 次写像とする。次の行列 A と $\mathbb{R}^2$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]$ に対し、$\mathbb{R}^2$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に関する f の表現行列を求めよ。

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$