2005 年度　線形数学 II　演習問題 (2)

U, V を次のベクトルによって生成される $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間とするとき, $U+V$ と $U\cap V$ の次元と基底をもとめよ。

1. $U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

2. $U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle$

3. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

4. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$

5. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

6. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

7. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\rangle$

8. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

9. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

10. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

ただし, $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で生成される部分ベクトル空間を表す.

例題. U を $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間, V を $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間とする. このとき, $U+V$ と $U\cap V$ の次元と基底を求めよ.

解: $U+V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ であるから, 次元は, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ のうち, 1次独立なものの最大個数となる. $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ ゆえ, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ が1次独立かどうかを調べる. $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -2 & 2\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

より, $\operatorname{rank} A = 3$. よって, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解のみ, すなわち, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は1次独立である. よって, $\dim(U+V) = 3$ となり, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ は $U+V$ の基底となる.

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U\cap V)$$

と $\dim(U+V) = 3$, $\dim U = \dim V = 2$ より, $\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-3 = 1$. 次元が1であることがわかったから, $U\cap V$ の零でないベクトルを一つとってくればそれが基底となる. $\boldsymbol{x} \in U\cap V$ ならば,

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

と表せるので, $s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ を解いて, s, t, u, v を求める.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & -1 & -1\\2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1/2\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$$

より (計算の詳細は略), $\begin{pmatrix}s\\t\\u\\v\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$ (r は任意の実数). よって, とくに $r=1$ として, 基底 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ が得られる.